Résumé 20 : Probabilités

Ω sera un ensemble abstrait, c'est-à-dire sans structure particulière. $\mathscr{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, y compris le sous-ensemble vide $\emptyset$. Nous noterons A^c, ou $\bar{A}$, le complémentaire de la partie A de Ω.

I Espaces probabilisés

§ 1. ***Tribus.—*** C'est la partie qualitative : nous définissons la classe des parties de Ω que nous considérerons

Définition I.1 ($\sigma-$algèbre, ou tribu)

On appelle tribu tout ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant les 3 hypothèses suivantes :

1. *$\mathscr{A}$ contient $\emptyset$ et Ω.*
2. *$\mathscr{A}$ est stable par complémentation, i.e que si $A \in \mathscr{A}$, alors $A^c \in \mathscr{A}$.*
3. *$\mathscr{A}$ est stable par les réunions dénombrables et les intersections dénombrables, i.e que si pour tout $i \in \mathbb{N}, A_i \in \mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ sont aussi dans $\mathscr{A}$.*

On dit alors du couple $(\Omega, \mathscr{A})$ qu'il est un **espace probabilisable**.
Les éléments de $\mathscr{A}$ sont appelés **événements**.

§ 2. ***Probabilité.—*** C'est la partie quantitative : on donne un poids à chaque événement.

Définition I.2 (*Probabilité*)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **mesure de probabilités**, *ou simplement une* **probabilité** *est une application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ qui vérifie :*

1. *$P(\Omega) = 1$.*
2. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ qui sont deux à deux disjoints (i.e $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$), on a : $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

Le nombre $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A. L'axiome 2. s'appelle la $\sigma-$additivité.
Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

Proposition I.3

Enfin, dans le cas où ω est fini ou dénombrable et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, se donner une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est équivalent à se donner une suite $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} = (P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ sommable de réels positifs tels que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

§ 3. ***Propriétés élémentaires des probabilités.—*** On se fixe ici un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Propriétés I.4

- *$A \in \mathscr{A} \Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.*
- *$A, B \in \mathscr{A}$ et $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.*
- *Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*
- *$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*
- *$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.*

Voici un analogue probabiliste du théorème de limite monotone :

Proposition I.5

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion d'événements, alors*
$$P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$
- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion d'événements, alors*
$$P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right).$$

II Probabilités Conditionnelles et Espérances

Définition II.1 (*Indépendance*)

1. *Deux événements A et B sont dits indépendants s'ils vérifient $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
2. *Soit une famille finie ou infinie d'événements $(A_i)_{i \in I}$. Ces événements sont dits indépendants, ou mutuellement indépendants, si pour toute partie finie J de I, on a*

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

: si les $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants, ils sont aussi deux à deux indépendants, mais la réciproque est fausse.

C'est la probabilité conditionnelle qui code la manière dont A dépend de B :

Définition II.2 (*Probabilité conditionnelle*)

Soient A et B deux événements avec $P(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Théorème II.3

Supposons que $P(B) > 0$.

1. *A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.*
2. *L'application $A \longmapsto P(A|B)$ de $\mathscr{A}$ dans $[0, 1]$ définit une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathscr{A}$, appelée la probabilité conditionnelle sachant B.*

Les trois résultats suivants, quoique élémentaires, sont très utiles, et en particulier le second d'entre eux.

Théorème II.4 (*Probabilités composées*)

Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ et si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, alors

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Théorème II.5 (*Probabilités Totales*)

Soit (E_n) un système complet d'éléments non négligeables de la tribu $\mathscr{A}$. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a

$$P(A) = \sum_n P(A|E_n)P(E_n).$$

En particulier, $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

Théorème II.6 (*Formule de Bayes*)

Si A et B sont des événements non négligeables, alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}.$$

III Variables Aléatoires Discrètes

Définition III.1 (*Variable aléatoire discrète*)

Une **variable aléatoire discrète** *définie sur Ω est une application $X : \Omega \longrightarrow E$, où E est un ensemble, dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable, et telle que pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.*
Lorsque $E = \mathbb{R}$, on dit de X qu'elle est une variable aléatoire réelle.
Si X est une variable aléatoire réelle, alors pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'application $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ est aussi une variable aléatoire réelle.

Exemples :

Les variables aléatoires discrètes 1_A, où $A \in \mathscr{A}$.

Définition III.2 (*loi d'une v.a.d*)

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire discrète. On appelle **loi de** X *la loi notée P_X définie sur la tribu $\mathscr{P}(E)$ de toutes les parties de E vérifiant :*

$$\text{Pour tout } B \subset E, \qquad P_X(B) = P\Big(X^{-1}(B)\Big).$$

On note aussi $P_X(B) = P(X \in B) = P\Big(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}\Big)$.

IV Lois usuelles

Nous donnons ici quelques lois usuelles, que vous rencontrerez dans maintes situations. Elles permettent de classer les variables aléatoires . Par exemple, une variable aléatoire est dite de Poisson si la loi est une loi de Poisson.
Dans le cas des variables de bernoulli, Binômiale, et géométrique, on notera systématiquement $q = 1 - p$.

§ 1. ***Lois finies.—*** Ici, Ω est un ensemble fini.

1.1 Loi uniforme

C'est la loi la plus simple, définie comme étant celle où $P(\{\omega\})$ ne dépend pas du choix de $\omega \in \Omega$. Ainsi, pour toute partie $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

1.2 Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$

Ici, $\Omega = \{\alpha, \beta\}$ est de cardinal 2, et si p est un réel compris entre 0 et 1, la loi de bernoulli P de paramètre p est définie par

$$P(\{\alpha\}) = p \text{ et } P(\{\beta\}) = q.$$

On pense à cette loi dès lors que l'on s'intéresse au succès ou à l'échec d'une expérience. Si $p = 1/2$, cela corrrespond au lancer d'une pièce non truquée.

Une **variable aléatoire de Bernoulli de paramètre** $p \in [0,1]$ est une variable aléatoire $X : \Omega \to \{0,1\}$ vérifiant $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$.

Exemples :

Les 1_A sont des variables de Bernoulli, avec $p = P(A)$.

1.3 Loi Binômiale $\mathscr{B}(n,p)$

Soit $p \in [0,1]$ et $\Omega = [\![0,n]\!]$ un ensemble de cardinal n.
La loi binomiale de paramètre p et de taille n, que l'on condensera en "loi $B(p,n)$", est définie par

$$\text{Pour tout } x \in [\![0,n]\!], \qquad P(\{x\}) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

On voit que tous ces réels sont positifs, et que leur somme est égale à 1.

Exemples :

1. FONDAMENTAL : Toute variable aléatoire représentant le nombre de succès dans une suite de n expériences aléatoires indépendantes mutuellement est une variable binomiale de loi $B(n,p)$ pour un ceratin p.
2. On lance n fois une pièce truquée. $\Omega = \{P,F\}^n$. Soit X le nombre total de PILE. X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, donc est discrète. Sa loi est donnée par $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ce qui en fait une variable aléatoire binomiale de paramètre p. C'est par ailleurs la somme de n variables de Bernoulli mutuellement indépendantes.

§ 2. ***Lois dénombrables.—*** On considèrera ici que $\Omega = \mathbb{N}$. Bien sûr, il n'existe pas de loi uniforme sur $\mathbb{N}$.
Rappelons que se donner une loi P sur cet espace discret est équivalent à se donner une suite$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, et de poser pour tout $n \in \mathbb{N}, p_n = P(\{n\})$.

2.1 Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$

La loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ est donnée par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = pq^{n-1}.$$

EXEMPLES :

> FONDAMENTAL : C'est la loi du premier succès dans une suite d'expériences aléatoires indépendantes deux à deux.

Proposition IV.1 (*Caractérisation d'une loi sans mémoire*)

$X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ est une variable géométrique $\Longleftrightarrow$ pour tous $n,k \in \mathbb{N}^*, P(X \geqslant k+n | X \geqslant n) = P(X \geqslant k+1)$.

2.2 Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

Soit $\lambda > 0$. La loi de poisson de paramètre λ, notée $\mathscr{P}(\lambda)$, est donnée par

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Un de ses intérêt est qu'elle peut fournir une bonne approximation de la loi de Benoulli :

Proposition IV.2 ($\mathscr{B}(p,n) \longleftrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$)

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables Binômiales de loi $\mathscr{B}(n,p_n)$ telles que $n \times p_n \to \lambda$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

V Espérance

Définition V.1 (*Espérance d'une variable aléatoire réelle*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète réelle.

1. *Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on appelle* **espérance** *de X le nombre appartenant à $[0,+\infty]$:*
$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$
2. *Si X est quelconque (i.e pas forcément positive), la variable aléatoire est dite* **d'espérance finie** *si la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est appelée espérance de X, i.e à nouveau $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.*

Nous noterons $\mathscr{L}^1(\Omega)$ (ou plus souvent $\mathscr{L}^1$) l'ensemble des variables aléatoires réelles $X : \Omega \to \mathbb{R}$ d'espérance finie.

Propriétés V.2 (*De l'espérance*)

1. *Soient $X,Y : \Omega \to \mathbb{R}$ d'espérances finies. Alors, pour tout réel a, $aX+Y$ est aussi d'espérance finie et*
$$E(aX+Y) = aE(X) + E(Y).$$
2. *Si $X \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$.*
3. *Si $X \geqslant Y$, et si ces deux v.a.d sont d'espérance finie, alors $E(X) \geqslant E(Y)$.*
4. *Si X est positive et d'espérance finie, et si $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une v.a.d telle que $|Y| \leqslant X$, alors Y est d'espérance finie.*
5. *Si Y est d'espérance finie, alors $|E(Y)| \leqslant E(|Y|)$.*
6. *$\mathscr{L}^1$ contient toutes les variables aléatoires bornées.*

Proposition V.3 (*Formule de transfert*)

Soit $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, et f une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors

- *$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X=x)f(x)\big)$ est sommable.*
- *Dans ce cas, $E\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)f(x)$.*

Proposition V.4 (*Inégalité de Markov*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire discrète, et $a > 0$. On a l'inégalité

$$P\big(|X| \geqslant a\big) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}.$$

VI Couple de variables aléatoires

§ 1. ***Variables Aléatoires Indépendantes.–*** Les couples, ou les familles, de variables aléatoires indépendantes sont les plus simples à étudier.

Définition VI.1 (*variables aléatoires indépendantes*)

1. *Un couple de variables aléatoires discrètes $X, Y : \Omega \to E$ sont dites* **indépendantes** *lorsque pour tous $x, y \in E$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, i.e lorsque*

$$\forall x, y \in E, \qquad P\Big((X=x)\cap(Y=y)\Big) = P(X=x)\times P(Y=y).$$

2. *Les variables aléatoires discrètes d'une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites mutuellement indépendantes lorsqu'elles le sont deux à deux.*

Théorème VI.2

1. *Si $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont indépendantes, et si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.*
2. *Si $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les deux variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.*

La loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes se calcule grâce à :

Proposition VI.3 (*Loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes*)

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes, alors pour tout réel k,

$$P(X+Y=k) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)P(X=k-y).$$

Propriétés VI.4 (*Espérance d'un produit de variables aléatoires indépendantes*)

Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et de plus

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

§ 2. ***Variables Aléatoires Dépendantes.–*** On est un peu plus démunis lorsque l'on ne dispose plus de cette hypothèse.

Définition VI.5

Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes réelles. Alors l'application $Z = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est aussi une variable aléatoire discrète. On appelle

- **loi conjointe** *de X et Y, et on note $P_{(X,Y)}$, la loi de la variable aléatoire $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$, qui est donc une loi sur $\mathbb{R}^2$:*

$$\text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}, \qquad P_{(X,Y)}\big((x,y)\big) = P\Big((X=x)\cap(Y=y)\Big).$$

- **lois marginales** *de (X,Y) les lois de X et de Y.*

- *pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) > 0$,* **la loi conditionnelle** *de Y sachant $(X = x)$ la loi μ de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\text{Pour tout } y \in \mathbb{R}, \qquad \mu(\{y\}) = P(Y = y|X = x).$$

- **loi conditionnelle** *μ de Y sachant $(X > x)$.... je vous laisse deviner.*

Remarques :

1. Ce que l'on vient de faire pour deux variables aléatoires peut se faire pour un nombre fini d'entre elles. On appelle ainsi vecteur aléatoire discret toute variable aléatoire discrète $Z : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Si on note alors $Z = (X_1, \dots, X_n)$, Z admet n lois marginales.
2. A l'aide de la loi conjointe, on peut retrouver les lois marginales, grâce à la formule des probabilités totales :
   Le contraire est faux, l'idée étant que 'lon ne sait pas comment dépendent des deux variables X et Y.

Proposition VI.6 (*De la conjointe aux marginales*)

Pour tout réel x, $f_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} f_{(X,Y)}(x, y)$. Autrement dit,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P\big(X = x, Y = y\big).$$

VII Variance, Covariance

§ 1. ***L'espace $\mathscr{L}^2$.–*** On s'intéresse ici à une classe plus restreinte de variables aléatoires .

Définition VII.1 (*Moments*)

Soit X une variable aléatoire réelle, et k est un entier positif. On appelle

- *k–ième* **moment** *de X le réel $m_k = E(X^k)$ (lorsqu'il existe évidemment).*
- *k–ième* **moment centré** *le réel $E\Big(\big(X - E(X)\big)^k\Big) = \mu_k$.*

Nous noterons $\mathscr{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles qui admettent un moment d'ordre 2 fini.

Propriétés VII.2 ($\mathscr{L}^2 \longleftrightarrow \mathscr{L}^1$)

1. *Si X admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie, i.e $\mathscr{L}^2(\Omega) \subset \mathscr{L}^1(\Omega)$*
2. **Cauchy-Schwarz :** *Si X et Y admettent toutes deux un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie, et*

$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$

: On ne confondra pas $E(X^2)$ et $E(X)^2$.

Propriétés VII.3 (*de $\mathscr{L}^2$*)

$\mathscr{L}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1$.

§ 2. ***La variance.–*** C'est une mesure de la dispersion.

Définition VII.4 (*Variance, Ecart-type*)

Soit $X \in \mathscr{L}^2$. On appelle

- **variance** *son deuxième moment centré $\text{var}(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$.*
- **écart-type** *le réel $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$.*
- *Si $X \in \mathscr{L}^2$, elle est dite* **centrée** *si son espérance est nulle, et* **réduite** *si sa variance vaut 1.*
  Si $\sigma_X > 0$, alors la variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$ est centrée réduite.

Les deux moments les plus utilisés sont l'espérance m_1 et le deuxième moment centré que l'on appelle variance. Ces deux quantités sont de grossières mesures de la dispersion de X : $E(X)$ est la valeur moyenne de X et σ_X^2 mesure la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Lemme 1

Si $X \in \mathscr{L}^2$, alors

1. var$(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. *Pour tous réels a et b,* var$(aX+b) = a^2$var(X).

La première est parfois appelée formule de Leibniz, et la seconde traduit l'invariance de σ_X par translation, et l'homogénéité de σ_X.

Théorème VII.5 (*Inégalité de Bienaymé-Chebychev*)

Si $X \in \mathscr{L}^2$, alors pour tout réel $a > 0$,

$$P\big(|X| \geqslant a\big) \leqslant \frac{E(X^2)}{a^2}.$$

On peut en particulier montrer qu'une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 est presque-sûrement contante $\iff$ elle est de variance nulle.

§ 3. *Espérance et Variance des lois usuelles.–*

1. **Une variable Aléatoire suivant une loi de Bernoulli** $\mathscr{B}(p)$ est définie par $X = 1$ a pour probabilité p et $X = 0$ a pour probabilité q. Alors

$$\boxed{E(X) = p \text{ et Var } (X) = pq}.$$

2. **Une variable Aléatoire suivant une loi uniforme** est définie par $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $P(X = k) = \frac{1}{n}$. Alors $\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et Var } (X) = \frac{n^2-1}{12}}$.
3. **Une variable Aléatoire suivant une loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$ est définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = pq^{n-1}$. Alors,

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p} \text{ et Var } (X) = \frac{q}{p^2}}$$

4. **Une variable Aléatoire suivant une loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ est définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. Alors,

$$\boxed{E(X) = \lambda \text{ et Var } (X) = \lambda}.$$

5. **Une variable Aléatoire suivant une loi Binomiale** $\mathscr{B}(n, p)$ est définie par $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!], P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Alors

$$\boxed{E(X) = np \text{ et Var } (X) = npq}.$$

6. Lorsque la variable aléatoire est à valeurs positives, on peut obtenir une espérance infinie. C'est le cas d'une variable dite de Pareto, i.e telle que $X(\omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $j \in \mathbb{N}^*, P(X = j) = \frac{1}{\zeta(\alpha+1)j^{\alpha+1}}$, lorsque $0 < \alpha \leqslant 1$.

§ 4. *Covariance.–*

Dans le cas où les variables ne sont pas indépendantes, la variance d'une somme fait apparaitre un terme correctif.

Définition VII.6

Soient $X, Y \in \mathscr{L}^2$. Il résulte de l'inégalité de Schwarz que la variable $\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)$ est d'espérance finie. On appelle

1. **covariance** *de X et Y le réel*

$$\text{cov}(X, Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big).$$

2. **Coefficient de corrélation** *entre X et Y le réel $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, si leurs variances ne sont pas nulles évidemment.*
3. *On dira que X et Y sont* **décorrélées** *lorsque leur covariance est nulle, i.e lorsque $E(XY) = E(X)E(Y)$. Nous avons déjà vu que c'est le cas lorsque X et Y sont indépendantes.*

La proposition suivante permet de calculer la variance d'une somme de variables aléatoires, et de calculer plus simplement la covariance.

Proposition VII.7

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors

1. $\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$.
2. $\text{var}\,(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$.
3. $\text{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{var}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(X_i, X_j)$.

Le coefficient de corrélation est une mesure de la dépendance de X par rapport à Y :

Proposition VII.8

Soient X et $Y \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Alors

1. $\boxed{|\rho(X,Y)| \leqslant 1}$.
2. *L'égalité $|\rho(X,Y)| = 1$est satisfaite si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $P(Y = aX + b) = 1$.*

Propriétés VII.9

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors,

1. *Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$.*
2. *Si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes, alors* $\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i)$.
3. *Si $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, alors* $\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n\text{var}(X_1)$.

VIII Loi faible des grands nombres

Théorème VIII.1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, et admettant un moment d'ordre 2. Si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $m = E(X_1)$, alors

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Nous avons au passage prouvé le lemme suivant, dont vous devrez connaitre la preuve :

Lemme 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi, et admettant un moment d'ordre 2. Si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, et $m = E(X_1)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

IX Fonctions Génératrices

Remarques :

Rappelons quelques propriétés des séries entières. Soit (a_n) une suite de réels.

- Si la suite (a_n) est bornée, alors le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant O} a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.
- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge absolument, alors la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$ converge normalement sur le disque unité fermé, et sa somme est continue sur ce disque.

Définition IX.1

Soi X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k.$$

Il faut savoir calculer les fonctions génératrices d'une variable de Bernoulli, ou de Poisson, ou géométrique.

Théorème IX.2

Si X a pour fonction génératrice G, alors

1. $G(1) = 1$, $G(0) = P(X=0)$.
2. *Pour tout* $k\in\mathbb{N}$, $P(X=k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

Théorème IX.3

1. *X est d'espérance finie $\iff$ G est dérivable en 1, et alors $G'(1) = E(X)$*
2. *X admet un second moment $\iff$ G est deux fois dérivable en 1,et alors* $\mathrm{var}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.
3. *Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, si G est k fois dérivable en 1,* $G^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\dots(X-k+1)\Big)$.

Théorème IX.4

Si $X_1,\dots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1}\times\cdots\times G_{X_n}.$$

X Les figures imposées

Exercices :

***CCP 97* :** On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ converge et $\forall\, x\in\,]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p\in\,]0,1[$ et $r\in\mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Exercices :

CCP 103

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$:
   $$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \min (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)).$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Exercices :

CCP 111 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R \geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.